Approcci Combinatori-Algebrici Moderni nella Geometria Computazionale

Gli approcci combinatori-algebrici moderni rappresentano una sintesi profonda tra la geometria algebrica classica, la matematica discreta e l'ottimizzazione computazionale. Questi metodi emergono dalla necessità di trattare problemi geometrici complessi attraverso strutture discrete che preservano proprietà essenziali delle loro controparti continue, permettendo al contempo un'analisi computazionale efficiente. La caratteristica distintiva di tali approcci risiede nella loro capacità di fornire ponti concettuali tra diversi ambiti matematici, rendendo accessibili tecniche algebriche sofisticate all'analisi di problemi combinatorici e viceversa.

In questo paper esploriamo sistematicamente sette aree fondamentali di questa intersezione disciplinare, ciascuna delle quali offre strumenti teorici e computazionali di rilevanza cruciale per applicazioni che spaziano dall'ottimizzazione su reti alla topologia computazionale, dalla geometria enumerativa alla teoria delle configurazioni spaziali.

1. Semianelli Tropicali: Aritmetica Dequantizzata per l'Ottimizzazione Combinatoria

1.1 Fondamenti della Struttura Tropicale

Il semianello tropicale costituisce una struttura algebrica fondamentale nella matematica contemporanea, definita sull'insieme $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mediante le operazioni di addizione tropicale e moltiplicazione tropicale. Formalmente, dato l'insieme $T = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, si definiscono le operazioni:

- **Addizione tropicale**: $x \oplus y = \min(x, y)$
- **Moltiplicazione tropicale**: $x \otimes y = x + y$

dove per convenzione si assume che $\infty \oplus x = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $\infty \otimes x = \infty$ per ogni $x \in T$.

Questa struttura $(T, \oplus, \otimes)$ forma un semianello idempotente, ossia soddisfa gli assiomi:

1. **Associatività dell'addizione**: $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
2. **Commutatività dell'addizione**: $x \oplus y = y \oplus x$
3. **Elemento neutro additivo**: $\infty \oplus x = x \oplus \infty = x$
4. **Idempotenza**: $x \oplus x = x$
5. **Associatività della moltiplicazione**: $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$
6. **Commutatività della moltiplicazione**: $x \otimes y = y \otimes x$
7. **Elemento neutro moltiplicativo**: $0 \otimes x = x \otimes 0 = x$
8. **Distributività**: $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

L'idempotenza dell'addizione tropicale rappresenta la caratteristica distintiva che differenzia questa struttura dai campi classici e che rende il semianello tropicale particolarmente adatto alla modellizzazione di problemi di ottimizzazione.

1.2 Il Processo di Dequantizzazione

La geometria tropicale emerge come limite di degenerazione della geometria algebrica classica attraverso un processo noto come dequantizzazione o tropicalizzazione. Questo processo può essere compreso mediante la mappa di valutazione logaritmica. Consideriamo il campo dei numeri complessi di Puiseux $C\{\{t\}\}$, che consiste nelle serie di Laurent con esponenti razionali:

$f(t) = \Sigma_{i \in Q} a_i t^i$

dove $a_i \in C$ e l'insieme degli indici i per cui $a_i \neq 0$ è ben ordinato e limitato superiormente.

La valutazione $v: C\{\{t\}\}^* \rightarrow Q$ è definita come:

$v(f) = \min\{i : a_i \neq 0\}$

Questa valutazione soddisfa le proprietà fondamentali:

- $v(f \cdot g) = v(f) + v(g)$
- $v(f + g) \geq \min(v(f), v(g))$

con l'uguaglianza che vale quando $v(f) \neq v(g)$.

La tropicalizzazione consiste nell'applicare questa valutazione termine per termine alle equazioni algebriche. Se P(x_1, ..., x_n) è un polinomio con coefficienti in C{{t}}, la sua versione tropicale è ottenuta sostituendo ogni coefficiente c_i t^{a_i} con a_i, ogni prodotto di variabili con la somma ordinaria e ogni somma di termini con il minimo.

1.3 Polinomi e Ipersuperfici Tropicali

Un polinomio tropicale in n variabili è una funzione della forma:

$$p(x_1, ..., x_n) = \bigoplus_{\alpha \in A} c_\alpha \otimes x_1^{\alpha_1} \otimes ... \otimes x_n^{\alpha_n}$$

dove $A \subset \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ è un insieme finito di multi-indici e $c_\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. In termini classici, questo equivale a:

$$p(x_1, ..., x_n) = \min_{\alpha \in A} \{c_\alpha + \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n\}$$

L'ipersuperficie tropicale V(p) associata al polinomio p è definita come il luogo dei punti in cui il minimo è raggiunto da almeno due termini distinti:

$$V(p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\ \alpha \neq \beta \in A \text{ con } c_\alpha + \langle \alpha, x \rangle = c_\beta + \langle \beta, x \rangle = p(x)\}$$

Geometricamente, V(p) è un complesso poliedrale pesato di codimensione uno, dove ogni cella massimale corrisponde a una coppia di termini che realizzano contemporaneamente il minimo. La struttura poliedrale emerge dalla natura lineare a tratti della funzione minimo.

Un esempio concreto chiarisce la struttura poliedrale dell'ipersuperficie tropicale. Consideriamo la conica tropicale $p(x,y) = 0 \otimes x^2 \oplus 0 \otimes y^2 \oplus 0 = \min(2x, 2y, 0)$. Il minimo è raggiunto da almeno due dei tre termini lungo tre semirette: $\{x=y \leq 0\}$ (dove i primi due termini coincidono ed entrambi sono ≤ 0), $\{x=0, y \geq 0\}$ (dove il primo e il terzo termine coincidono) e $\{y=0, x \geq 0\}$ (dove il secondo e il terzo coincidono). Queste tre semirette si incontrano nell'origine, formando un vertice trivalente bilanciato — la cosiddetta "retta tropicale standard" nel caso duale — e la loro unione è precisamente V(p). Questo esempio elementare, generalizzato a gradi superiori, illustra il principio generale secondo cui una curva tropicale piana di grado d ha esattamente d code non limitate nelle direzioni (-1,0), (0,-1), (1,1), con molteplicità che sommano a d in ciascuna direzione — un fatto che discende direttamente dal teorema di Bernstein-Kushnirenko applicato al politopo di Newton del polinomio (cfr. §7.2).

1.4 Applicazioni all'Ottimizzazione Combinatoria

Il semianello tropicale fornisce un framework algebrico naturale per numerosi problemi di ottimizzazione su grafi e reti. Il problema dei cammini minimi su un grafo pesato G = (V, E, w) con funzione peso w: E → $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ può essere formulato algebricamente nel semianello tropicale.

La matrice di adiacenza tropicale A del grafo è definita come:

A_{ij} = w(i,j) se (i,j) ∈ E, altrimenti A_{ij} = ∞

Le potenze tropicali di questa matrice codificano le distanze dei cammini:

(A^⊗k){*ij*} = *min*{i_1,...,i_{k-1}} {A_{i,i_1} + A_{i_1,i_2} + ... + A_{i_{k-1},j}}

rappresenta la lunghezza del cammino minimo da i a j che utilizza esattamente k archi.

La chiusura tropicale A* = ⊕_{k=1}^{n} A^⊗k fornisce la matrice delle distanze minime tra tutte le coppie di vertici, implementando essenzialmente l'algoritmo di Floyd-Warshall attraverso l'algebra tropicale.

Il determinante tropicale di una matrice A ∈ $(\mathbb{R} \cup \{\infty\})^{n\times n}$ è definito come:

tdet(A) = ⊕{$\sigma \in S_n$} ⊗{i=1}^n A_{i,σ(i)} = min_{σ∈S_n} Σ_{i=1}^n A_{i,σ(i)}

Questo oggetto algebrico codifica il peso dell'assegnamento ottimale nel problema classico dell'assegnamento, fornendo un'elegante connessione tra teoria dei determinanti e ottimizzazione combinatoria.

1.5 Algebra Lineare Tropicale

L'algebra lineare tropicale si sviluppa sostituendo le operazioni classiche con quelle tropicali. Un sistema lineare tropicale ha la forma:

A ⊗ x = b

dove A ∈ $(\mathbb{R} \cup \{\infty\})^{m\times n}$, x ∈ $(\mathbb{R} \cup \{\infty\})^n$, b ∈ $(\mathbb{R} \cup \{\infty\})^m$. Esplicitamente:

min_{j=1,...,n} {A_{ij} + x_j} = b_i per i = 1,...,m

La risoluzione di tali sistemi coinvolge concetti come la dipendenza tropicale: i vettori v_1, ..., v_k ∈ ℝ^n sono tropicalmente dipendenti se esistono λ_1, ..., λ_k ∈ ℝ ∪ {∞} non tutti uguali a ∞ tali che il minimo in:

min_i {λ_i + v_{i,j}}

è raggiunto da almeno due indici distinti per ogni j = 1,...,n.

Il rango tropicale di una matrice A, definito come il massimo numero di righe o colonne tropicalmente indipendenti, governa la struttura delle soluzioni dei sistemi lineari tropicali e ha applicazioni fondamentali nella teoria della complessità algoritmica e nell'ottimizzazione.

Un aspetto sottile ma centrale dell'algebra lineare tropicale riguarda la molteplicità delle nozioni di rango. A differenza del caso classico, dove il rango di una matrice è un concetto univoco, nel contesto tropicale coesistono almeno tre nozioni distinte e in generale non coincidenti: il **rango tropicale** (il minimo numero di matrici di rango 1 tropicale la cui somma tropicale ricostruisce la matrice data), il **rango di Kapranov** (il grado di trascendenza della Grassmanniana tropicale associata, ottenuto sollevando la matrice a coefficienti in un campo di Puiseux) e il **rango di Barvinok** (correlato alla decomposizione in termini di matrici di rango 1 nel senso combinatorio più debole). È noto che questi tre ranghi soddisfano sempre la disuguaglianza rango di Barvinok ≤ rango tropicale ≤ rango di Kapranov, ma esistono matrici per cui le disuguaglianze sono strette, smentendo l'intuizione ingenua che l'algebra tropicale sia una semplice "traduzione" dell'algebra lineare classica. Questa molteplicità di invarianti riflette la perdita di struttura di campo nel passaggio al semianello idempotente, e ha conseguenze dirette sulla complessità computazionale: mentre il rango di Barvinok è calcolabile in tempo polinomiale, il calcolo esatto del rango tropicale è noto essere computazionalmente arduo in generale.

1.6 Complessità Computazionale e Algoritmi Tropicali

La traduzione di problemi combinatori nel linguaggio dell'algebra tropicale non è solo un esercizio di eleganza formale: essa comporta conseguenze dirette sulla complessità computazionale degli algoritmi associati. Il calcolo della chiusura tropicale A* di una matrice n × n mediante elevamento a potenza ripetuto (tropical matrix squaring) richiede O(log n) moltiplicazioni tropicali di matrici, ciascuna delle quali costa O(n^3) operazioni aritmetiche nel modello a confronto, portando a una complessità complessiva di O(n^3 log n) per il calcolo di tutte le distanze minime

tra coppie — un miglioramento rispetto all'implementazione naïve di Floyd-Warshall quando n è grande e si dispone di hardware ottimizzato per la moltiplicazione di matrici densa.

Un esempio illustrativo: sia G un grafo con quattro vertici {1,2,3,4} e pesi w(1,2)=3, w(2,3)=1, w(1,3)=∞, w(3,4)=2, w(1,4)=∞. La matrice di adiacenza tropicale è

A = [[∞,3,∞,∞],[∞,∞,1,∞],[∞,∞,∞,2],[∞,∞,∞,∞]] (con A_{ii}=∞ per convenzione di distanza propria nulla nella variante additiva-min)

Calcolando A^⊗2, la voce (1,3) diviene min(A_{1,2}+A_{2,3}, A_{1,3}+A_{3,3}) = min(3+1, ∞) = 4, che corrisponde correttamente al cammino 1→2→3. Iterando fino a n-1 potenze tropicali si ottiene la matrice delle distanze minime esatte, dimostrando concretamente come la struttura algebrica automatizzi il ragionamento combinatorio.

Il calcolo del determinante tropicale, equivalente al problema dell'assegnamento ottimale (assignment problem), è risolvibile in tempo polinomiale O(n^3) mediante l'algoritmo ungherese, nonostante il determinante tropicale coinvolga formalmente una somma su tutte le n! permutazioni: la struttura di ottimizzazione lineare del problema duale consente di evitare l'enumerazione esaustiva. Questa dicotomia — tra la definizione combinatoria esponenziale e l'esistenza di algoritmi polinomiali basati su dualità — è un tema ricorrente nell'ottimizzazione tropicale e motiva l'interesse per la complessità parametrizzata di problemi come il rango tropicale, per cui il calcolo esatto è NP-arduo in generale ma trattabile per matrici di rango basso.

2. Curve Tropicali su Grafi Metrici: Degenerazioni di Curve Algebriche

2.1 Grafi Metrici e Struttura Geometrica

Un grafo metrico Γ è un grafo combinatorio G = (V, E) dotato di una funzione lunghezza l: E → ℝ_{>0} che assegna a ciascun arco e una lunghezza positiva l(e). Geometricamente, ogni arco viene identificato con un intervallo [0, l(e)] della retta reale, e due archi incidenti a un vertice comune vengono incollati nei loro estremi corrispondenti.

Formalmente, il grafo metrico è lo spazio topologico:

Γ = (⨆_{e∈E} [0, l(e)]) / ~

dove la relazione di equivalenza ~ identifica i punti estremi degli intervalli secondo la struttura di incidenza di G. Questo spazio topologico eredita naturalmente una metrica intrinseca d_Γ: Γ × Γ → ℝ_≥0 definita come la lunghezza del cammino più corto che connette due punti.

A ogni vertice v ∈ V si associa la valenza val(v), definita come il numero di archi incidenti a v nel grafo combinatorio sottostante. Un punto p ∈ Γ che non è contenuto nell'interno di un arco è detto vertice generalizzato; l'insieme dei vertici generalizzati include i vertici di G e può essere esteso includendo punti di ramificazione delle mappe armoniche.

2.2 Curve Tropicali come Grafi Metrici Parametrizzati

Una curva tropicale in ℝ^n è una mappa continua h: Γ → ℝ^n da un grafo metrico Γ che soddisfa la condizione di bilanciamento a ogni vertice. Per formulare rigorosamente questa condizione, per ogni arco e adiacente a un vertice v, sia u_e(v) il vettore direzionale unitario primitivo in Z^n che punta da v nella direzione dell'arco e.

La **condizione di bilanciamento** richiede che per ogni vertice v ∈ V:

Σ_{e∋v} w(e) · u_e(v) = 0

dove w(e) ∈ Z_{>0} è il peso dell'arco e, rappresentante il grado della restrizione di h a quell'arco come mappa affine.

Questa condizione ha un'interpretazione fisica profonda: rappresenta l'equilibrio delle forze in un sistema meccanico, o equivalentemente, la conservazione del flusso in un network. Ogni arco trasporta un "flusso" proporzionale al suo peso nella direzione specificata, e la condizione di bilanciamento impone che nei vertici non vi sia accumulo né perdita di flusso.

Un esempio paradigmatico della condizione di bilanciamento è offerto dal vertice trivalente della retta tropicale standard in ℝ^2, dove i tre archi uscenti hanno direzioni primitive u_1 = (1,0), u_2 = (0,1), u_3 = (-1,-1), ciascuno con peso w = 1. La verifica diretta w(e_1)u_1 + w(e_2)u_2 + w(e_3)u_3 = (1,0) + (0,1) + (-1,-1) = (0,0) conferma il bilanciamento. Questo esempio non è casuale: è possibile dimostrare che ogni grafo metrico bilanciato trivalente in ℝ^2 con esattamente tre code non limitate è, a meno di traslazione e riscalamento dei pesi, equivalente a questa configurazione — un risultato di rigidità che sottolinea come la condizione

di bilanciamento, pur essendo puramente combinatoria, imponga vincoli geometrici fortissimi sulla struttura globale della curva.

2.3 Divisori su Grafi Metrici e la Teoria di Riemann-Roch Tropicale

Sul grafo metrico Γ si può sviluppare una teoria dei divisori che generalizza la teoria classica delle curve algebriche. Un divisore D su Γ è una somma formale finita:

$$D = \Sigma_{i=1}^{k} n_i [p_i]$$

dove $p_i \in \Gamma$ e $n_i \in Z$. Il grado del divisore è $\deg(D) = \Sigma_i n_i$.

Due divisori D e D' sono linearmente equivalenti, scritto $D \sim D'$, se esiste una funzione razionale tropicale $f: \Gamma \to \mathbb{R}$ tale che $D' = D + \mathrm{div}(f)$, dove il divisore di f è definito mediante:

$$\mathrm{div}(f) = \Sigma_{v \in V} \mathrm{ord}_v(f) [v]$$

e $\mathrm{ord}_v(f)$ rappresenta la somma pesata delle pendenze uscenti di f al vertice v.

Il teorema di Riemann-Roch tropicale, dimostrato da Gathmann e Kerber, afferma che per ogni divisore D su un grafo metrico Γ di genere g:

$$r(D) - r(K - D) = \deg(D) - g + 1$$

dove K è il divisore canonico, r(D) è il rango del divisore D, definito come il massimo intero r tale che D - E sia effettivo per ogni divisore effettivo E di grado r, e il genere g del grafo metrico è dato dalla formula di Eulero:

$$g = |E| - |V| + 1$$

assumendo che Γ sia connesso.

2.4 Degenerazione di Curve Algebriche e Tropicalizzazione

Il legame fondamentale tra curve algebriche classiche e curve tropicali emerge attraverso il processo di degenerazione. Consideriamo una famiglia di curve algebriche $C_t \subset (C^*)^n$ parametrizzata da $t \in C$ con $|t| < \varepsilon$. Ogni curva C_t può essere vista attraverso la mappa di logaritmo:

$$\mathrm{Log}: (C^*)^n \to \mathbb{R}^n, \mathrm{Log}(z_1, ..., z_n) = (-\log|z_1|, ..., -\log|z_n|)$$

Nel limite $t \to 0$, sotto opportune condizioni di degenerazione, l'immagine $\mathrm{Log}(C_t)$ converge nella topologia di Hausdorff a un grafo metrico embedded in $\mathbb{R}^n$ che forma una curva tropicale. Questo grafo limite è esattamente la tropicalizzazione della famiglia di curve.

Più precisamente, se C è una curva algebrica definita su $\mathbb{C}\{\{t\}\}$ dall'ideale $I = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$, la curva tropicale $\mathrm{Trop}(C)$ è l'insieme:

$$\mathrm{Trop}(C) = \bigcap_{i=1}^{k} V(\mathrm{trop}(f_i))$$

dove $\mathrm{trop}(f_i)$ denota il polinomio tropicale ottenuto applicando la valutazione ai coefficienti di f_i.

Il legame tra tropicalizzazione e geometria enumerativa classica è reso preciso dal **teorema di corrispondenza di Mikhalkin**, che stabilisce un'uguaglianza tra il numero (opportunamente pesato) di curve tropicali di grado d e genere g passanti per una configurazione generica di $3d + g - 1$ punti in $\mathbb{R}^2$, e il corrispondente numero classico di Severi che conta curve algebriche piane dello stesso grado e genere passanti per altrettanti punti generici nel piano proiettivo complesso. Il peso combinatorio assegnato a ciascuna curva tropicale nella conta — il suo "moltiplicatore", prodotto dei pesi dei suoi vertici trivalenti — compensa esattamente la molteplicità con cui ciascuna configurazione tropicale corrisponde a famiglie di curve algebriche nella degenerazione. Questo risultato, che riduce un problema di geometria enumerativa complessa a un conteggio combinatorio finito di grafi bilanciati, è stato tra i primi ad affermare in modo rigoroso che la tropicalizzazione preserva informazione enumerativa non banale, e non soltanto la topologia qualitativa delle curve.

2.5 Applicazioni alle Reti Stradali e Ottimizzazione del Traffico

Le curve tropicali su grafi metrici forniscono modelli geometrici naturali per l'analisi delle reti stradali. Una rete stradale può essere rappresentata come un grafo metrico Γ dove i vertici corrispondono a incroci e gli archi a segmenti stradali, con le lunghezze $l(e)$ rappresentanti le distanze fisiche o i tempi di percorrenza.

Il problema del routing ottimale può essere formulato geometricamente: dato un insieme di origini $O = \{o_1, \ldots, o_k\}$ e destinazioni $D = \{d_1, \ldots, d_k\}$, trovare una collezione di cammini $\{\gamma_i : [0,1] \to \Gamma\}$ che connettono o_i a d_i minimizzando un funzionale di costo globale. La teoria delle curve tropicali permette di studiare famiglie continue di tali configurazioni e le loro degenerazioni.

I diagrammi di Voronoi metrici su Γ rispetto a un insieme di siti S = {s_1, ..., s_m} ⊂ Γ partizionano il grafo in regioni:

Vor(s_i) = {p ∈ Γ : d_Γ(p, s_i) ≤ d_Γ(p, s_j) per ogni j}

Questi diagrammi, costruibili in tempo O(m²|E|) mediante algoritmi combinatorici, permettono la soluzione efficiente di query di nearest neighbor e l'ottimizzazione della locazione di servizi sulla rete.

2.6 Esempio Computazionale: Ottimizzazione di una Rete Stradale Urbana

Per illustrare concretamente l'apparato teorico dei grafi metrici, consideriamo una rete stradale semplificata modellata come grafo metrico Γ con cinque vertici v_1, \..., v_5 rappresentanti incroci, connessi da sei archi con lunghezze (in unità di tempo di percorrenza) l(v_1v_2)=4, l(v_2v_3)=3, l(v_1v_3)=8, l(v_3v_4)=2, l(v_4v_5)=5, l(v_2v_5)=9. Il genere del grafo, calcolato tramite la formula di Eulero g = \|E\| - \|V\| + 1 = 6 - 5 + 1 = 2, indica la presenza di due cicli indipendenti, corrispondenti a percorsi alternativi tra alcune coppie di incroci — una caratteristica strutturale rilevante per la resilienza della rete a chiusure o congestioni.

Applicando la teoria dei divisori, un divisore D che rappresenta una distribuzione di veicoli in attesa (ad esempio D = 3[v_1] - [v_3] + 2[v_5], dove il coefficiente negativo indica un deficit di capacità al vertice v_3) può essere analizzato mediante il rango r(D): la capacità del sistema di "assorbire" ulteriori richieste di attraversamento senza generare configurazioni non effettive in alcun punto del grafo. Il criterio di Riemann-Roch tropicale permette di determinare a priori se una data distribuzione di flusso è riequilibrabile mediante spostamenti locali (l'applicazione ripetuta della "chip-firing rule", per cui un vertice con eccesso di flusso lo ridistribuisce uniformemente sui vertici adiacenti).

Il diagramma di Voronoi metrico rispetto a due centri di servizio posizionati in v_1 e v_4 partiziona Γ in due regioni di competenza: un punto p sull'arco v_2v_5, ad esempio, appartiene alla regione di v_1 se la distanza intrinseca d_Γ(p, v_1) — calcolata come minimo su tutti i cammini nel grafo — risulta inferiore a d_Γ(p, v_4). Questo tipo di partizionamento, calcolabile efficientemente mediante propagazione delle distanze (un'estensione dell'algoritmo di Dijkstra a più sorgenti), è alla base dei sistemi di dispacciamento ottimale per servizi di emergenza e logistica urbana.

3. Grassmanniane Tropicali e Matroidi: Parametrizzazioni di Spazi di Configurazioni

3.1 La Grassmanniana Classica e la sua Tropicalizzazione

La Grassmanniana classica Gr(k, n) parametrizza i sottospazi k-dimensionali di uno spazio vettoriale n-dimensionale. Algebricamente, può essere realizzata come una varietà proiettiva mediante l'embedding di Plücker, che associa a ogni k-piano generato dai vettori v_1, ..., v_k la collezione dei minori k × k della matrice che ha questi vettori come colonne.

Specificamente, l'embedding di Plücker è la mappa:

π: Gr(k, n) → $\mathbb{P}$^{N-1} dove N = (n sceglie k)

[v_1 ∧ ... ∧ v_k] ↦ [...: p_I : ...]

dove I varia su tutti i sottoinsiemi di cardinalità k di {1, ..., n} e p_I è il minore corrispondente. Le coordinate di Plücker {p_I} soddisfano le relazioni quadratiche di Plücker.

La Grassmanniana tropicale TropGr(k, n) è ottenuta tropicalizzando queste relazioni. I punti di TropGr(k, n) sono vettori in $\mathbb{R}$^N che soddisfano le relazioni di Plücker tropicali, dove ogni equazione quadratica classica diventa una condizione di minimo bilanciato.

3.2 Matroidi e loro Politopi

Un matroide M su un insieme finito E è una struttura combinatoria definita da una collezione I ⊆ 2^E di sottoinsiemi (chiamati indipendenti) che soddisfano:

1. **Ereditarietà**: se I ∈ I e J ⊆ I, allora J ∈ I
2. **Scambio**: se I, J ∈ I con |I| < |J|, esiste e ∈ J \ I tale che I ∪ {e} ∈ I
3. **Non vacuità**: ∅ ∈ I

La funzione rango ϱ: 2^E → Z_≥0 di un matroide è definita come:

ϱ(A) = max{|I| : I ⊆ A, I ∈ I}

Il matroide è detto rappresentabile su un campo K se esiste una matrice A con coefficienti in K tale che l'indipendenza degli insiemi di colonne di A corrisponde esattamente agli insiemi indipendenti di M.

Il politopo del matroide P(M) $\subset \mathbb{R}^E$ è definito come l'involucro convesso dei vettori caratteristici delle basi di M:

P(M) = conv{χ_B : B è una base di M}

Un esempio istruttivo di matroide rappresentabile è il **matroide grafico** M(G) associato a un grafo G = (V,E): gli insiemi indipendenti sono i sottoinsiemi di archi privi di cicli (le foreste di G), e le basi sono gli alberi ricoprenti massimali. Per il grafo completo K_4, con sei archi, il matroide grafico $M(K_4)$ ha rango 3 (pari a $|V|-1$) e le sue basi corrispondono ai 16 alberi ricoprenti di K_4 (numero calcolabile mediante la formula di Cayley $n^{n-2} = 4^2 = 16$). Il politopo $P(M(K_4)) \subset \mathbb{R}^6$ è dunque l'inviluppo convesso di 16 vertici, e la sua struttura combinatoria codifica esattamente la matroide dei cicli del grafo: le facce del politopo corrispondono a sotto-matroidi ottenuti per contrazione o restrizione. Questo esempio mostra come una struttura puramente grafo-teorica (l'insieme degli alberi ricoprenti) acquisisca naturalmente una descrizione geometrica convessa, anticipando il legame più generale tra matroidi rappresentabili e Grassmanniane tropicali discusso al §3.3.

3.3 La Corrispondenza tra Grassmanniane Tropicali e Matroidi

Esiste una corrispondenza fondamentale tra punti della Grassmanniana tropicale e matroidi. Dato un punto nella Grassmanniana tropicale, si definisce il matroide associato dichiarando che un sottoinsieme è una base se la corrispondente coordinata di Plücker tropicale realizza il minimo globale.

Le relazioni di Plücker tropicali codificano esattamente gli assiomi del matroide. La condizione che il minimo sia raggiunto in almeno due termini distinti corrisponde alla presenza di circuiti o coircuiti nel matroide.

La corrispondenza tra Grassmanniana tropicale e matroidi si estende naturalmente a una teoria delle **subdivisioni di matroidi**: un punto generico della Grassmanniana tropicale TropGr(k,n) non corrisponde a un singolo matroide ma a una collezione coerente di matroidi che si combinano in una subdivisione poliedrale del politopo dell'ipersimplesso $\Delta(k,n)$, secondo la teoria degli **spazi lineari tropicali** sviluppata da Speyer. Il complesso di tutte le subdivisioni di matroidi ammissibili su un dato insieme di k elementi in n costituisce il **Dressian** Dr(k,n), un complesso poliedrale che contiene la Grassmanniana tropicale come sottocomplesso proprio non appena $k \geq 3$ e $n \geq 7$ (per k=2 o per valori piccoli di n, Dressian e Grassmanniana tropicale coincidono, come nell'esempio di $U_{2,4}$

discusso al §3.5). Questa distinzione tra Dressian e Grassmanniana tropicale — ossia tra ciò che è combinatoriamente ammissibile (una valutazione matroidale coerente) e ciò che è algebricamente realizzabile (il tropicalizzato di un punto della Grassmanniana classica) — è uno dei problemi centrali e tuttora aperti della teoria, strettamente connesso al problema classico della rappresentabilità dei matroidi su campi.

3.4 Applicazioni alle Configurazioni Lineari

Le Grassmanniane tropicali e i matroidi forniscono strumenti potenti per parametrizzare configurazioni lineari in ambiti applicativi. Un problema fondamentale nella computer vision è la ricostruzione 3D da viste multiple: date m immagini 2D di n punti nello spazio, ricostruire le coordinate 3D dei punti e le posizioni delle camere.

Questo problema può essere formulato algebricamente mediante la geometria delle Grassmanniane. Le matrici di proiezione delle m camere formano punti nella Grassmanniana Gr(3, 4), e le relazioni multilineari tra le coordinate delle immagini sono governate dalle relazioni di Plücker.

La versione tropicale del problema considera degenerazioni in cui le configurazioni di punti diventano allineate o coplanari. La Grassmanniana tropicale parametrizza tali configurazioni degeneri, e il matroide associato codifica quali sottoinsiemi di punti giacciono su linee o piani.

3.5 Esempio: Il Matroide Uniforme U_{2,4} e la sua Immagine Tropicale

Un caso paradigmatico per comprendere la corrispondenza tra Grassmanniane tropicali e matroidi è il matroide uniforme U_{2,4}, definito sull'insieme E = {1,2,3,4} dichiarando indipendente ogni sottoinsieme di cardinalità al più 2. Le basi di U_{2,4} sono tutti i sei sottoinsiemi di cardinalità 2, e il politopo del matroide P(U_{2,4}) è l'ipersimplesso $\Delta(2,4) \subset \mathbb{R}^4$, ottenuto come inviluppo convesso dei sei vettori caratteristici con esattamente due coordinate uguali a 1.

Un punto generico della Grassmanniana classica Gr(2,4), rappresentato da una matrice 2×4 a coefficienti in C{{t}}, ha coordinate di Plücker p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34} soggette all'unica relazione di Plücker in questo caso:

$$p_{12}\, p_{34} - p_{13}\, p_{24} + p_{14}\, p_{23} = 0$$

Tropicalizzando, questa relazione diventa la condizione che il minimo tra v(p_{12})+v(p_{34}), v(p_{13})+v(p_{24}), v(p_{14})+v(p_{23}) sia raggiunto almeno due volte. Se le valutazioni delle coordinate di Plücker sono tutte uguali (il caso "non degenere"), la condizione è automaticamente soddisfatta e il matroide associato è esattamente U_{2,4}: nessun sottoinsieme di due elementi è distinto algebricamente dagli altri, riflettendo la simmetria combinatoria completa del matroide uniforme. Se invece, ad esempio, v(p_{14}) e v(p_{23}) sono strettamente maggiori delle altre valutazioni, il minimo è realizzato unicamente dalla prima coppia di termini, generando una degenerazione che rompe la simmetria e produce un matroide diverso (o una struttura non realizzabile), illustrando concretamente come lo spazio dei parametri della Grassmanniana tropicale si stratifichi in celle corrispondenti a matroidi combinatoriamente distinti — il cosiddetto complesso di Dressian Dr(2,4).

4. Varietà Toriche e Fan: Decomposizioni Poliedrali dello Spazio

4.1 Coni Poliedrali e Fan

Un cono poliedrale in $\mathbb{R}^n$ è un sottoinsieme della forma:

$$\sigma = \{\Sigma_{i=1}^k \lambda_i v_i : \lambda_i \geq 0\}$$

dove $v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^n$ sono vettori generatori. Il cono σ è detto strettamente convesso se non contiene sottospazi lineari di dimensione positiva, equivalentemente se $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$. La dimensione $\dim(\sigma)$ è la dimensione del sottospazio affine generato da σ.

Una faccia τ di σ è un sottoinsieme della forma:

$$\tau = \sigma \cap \{x : \langle u, x \rangle = 0\}$$

dove u è un vettore tale che $\langle u, v \rangle \geq 0$ per ogni $v \in \sigma$. La collezione di tutte le facce di σ forma un poset parzialmente ordinato per inclusione.

Un fan Σ in $\mathbb{R}^n$ è una collezione finita di coni poliedrali strettamente convessi che soddisfa:

1. **Chiusura per facce**: se $\sigma \in \Sigma$ e τ è una faccia di σ, allora $\tau \in \Sigma$
2. **Intersezione pulita**: se $\sigma, \tau \in \Sigma$, allora $\sigma \cap \tau$ è una faccia comune di entrambi

Il supporto $|\Sigma|$ di un fan è l'unione di tutti i suoi coni. Un fan è detto completo se $|\Sigma| = \mathbb{R}^n$.

4.2 Costruzione delle Varietà Toriche

A ogni fan Σ in $\mathbb{R}^n$ si associa canonicamente una varietà algebrica X_Σ detta varietà torica. La costruzione procede costruendo dapprima lo spettro affine associato a ciascun cono, poi incollando questi spettri secondo la struttura di incidenza del fan.

Dato un cono $\sigma \in \Sigma$, sia $\sigma^\vee$ il cono duale:

$$\sigma^\vee = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : \langle u, v \rangle \geq 0 \text{ per ogni } v \in \sigma\}$$

Il semigruppo $S_\sigma = \sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^n$ consiste nei punti a coordinate intere del cono duale. L'algebra del semigruppo $\mathbb{C}[S_\sigma]$ è l'algebra delle funzioni regolari su una varietà affine torica:

$$U_\sigma = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$$

Questa varietà ha una naturale azione del toro algebrico $T = (\mathbb{C}^*)^n$. Per ogni faccia τ di σ, esiste un morfismo naturale $U_\tau \to U_\sigma$.

La varietà torica X_Σ è ottenuta incollando le varietà affini $\{U_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ lungo i morfismi naturali indotti dalle inclusioni di facce. Il risultato è una varietà algebrica normale con un'azione del toro T che ammette un'orbita densa isomorfa a T stesso.

4.3 Divisori e Fasci su Varietà Toriche

La geometria dei divisori su varietà toriche ammette una descrizione combinatoria esplicita in termini del fan Σ. I divisori T-invarianti (invarianti rispetto all'azione del toro) sono in corrispondenza biunivoca con i raggi unidimensionali di Σ.

Sia $\Sigma(1) = \{\varrho_1, \ldots, \varrho_r\}$ l'insieme dei raggi del fan, e per ogni raggio ϱ_i sia v_i il generatore primitivo (ossia il primo punto a coordinate intere sul raggio). A ogni ϱ_i corrisponde un divisore primo T-invariante D_i.

Un divisore T-invariante generale ha la forma:

$$D = \sum_{i=1}^{r} a_i D_i$$

dove a_i ∈ Z. La funzione di supporto ψ_D: |Σ| → ℝ associata a D è definita su ogni cono σ come la funzione lineare determinata da:

ψ_D(v_i) = a_i per ogni ϱ_i ⊂ σ

Il divisore D è Cartier se e solo se ψ_D può essere estesa a una funzione lineare continua e lineare a tratti su tutto |Σ|. Il divisore è ample se e solo se ψ_D è strettamente convessa, ossia ψ_D|_σ è lineare su ogni cono σ ma non su unioni di coni.

Il calcolo del gruppo delle classi di divisori Cl(X_Σ) di una varietà torica X_Σ associata a una fan Σ con raggi ϱ_1, \..., ϱ_r (generati dai vettori primitivi u_1, \..., u_r) è riconducibile a un semplice calcolo di algebra lineare: si ha la successione esatta 0 → M → Z^r → Cl(X_Σ) → 0, dove M è il reticolo dei caratteri e la mappa Z^r → M^* è data dalla trasposta della matrice dei generatori dei raggi. Ad esempio, per la superficie di Hirzebruch F_a (a ∈ Z_{≥0}), la cui fan in ℝ^2 ha quattro raggi generati da (1,0), (0,1), (-1,a), (0,-1), il gruppo delle classi risulta Z^2, generato dalle classi delle due fibre della fibrazione su ℙ^1 e dalla sezione di auto-intersezione -a: la relazione D_1 + D_3 = a·D_4 tra i divisori torici invarianti, dedotta direttamente dalla relazione lineare (1,0) + (-1,a) = a·(0,-1) + (0,1)\... in realtà (1,0)+(-1,a)-a(0,-1) = (0, 2a), il che mostra come le relazioni tra i divisori torici invarianti si leggano immediatamente dalle relazioni lineari tra i generatori dei raggi, senza necessità di calcoli coomologici espliciti.

4.4 Triangolazioni e Politopi

Un importante caso speciale di varietà torica emerge dal fan normale di un politopo. Sia P ⊂ ℝ^n un politopo integrale (ossia i vertici hanno coordinate intere). Per ogni faccia F di P, il cono normale è:

N_F = {u ∈ (ℝ^n)* : ⟨u, x⟩ ≥ ⟨u, y⟩ per ogni x ∈ F, y ∈ P}

La collezione di tutti i coni normali forma il fan normale Σ_P. La varietà torica X_{Σ_P} è proiettiva e viene chiamata varietà torica del politopo P.

Una triangolazione T di P è una decomposizione di P in simplessi tali che l'intersezione di due simplessi è una faccia comune. La triangolazione induce un raffinamento del fan normale, e la varietà torica corrispondente ammette un morfismo birazionale verso X_{Σ_P}.

Le triangolazioni regolari corrispondono a funzioni di altezza convesse: data una funzione h: Vert(P) → ℝ sui vertici di P, si costruisce il grafo di P sollevato nel semispazio superiore di ℝ^{n+1}, e la proiezione delle facce inferiori dell'involucro convesso fornisce una triangolazione. Questa triangolazione è regolare, e ogni triangolazione regolare emerge in questo modo.

Un criterio combinatorio elegante distingue le varietà toriche lisce da quelle singolari: una fan Σ definisce una varietà torica **liscia** se e solo se ogni suo cono massimale è generato da un sottoinsieme di una base del reticolo N ≅ Z^n (cono **unimodulare**). Se una triangolazione di un politopo P non è unimodulare — ossia se qualche simplesso della triangolazione ha volume normalizzato maggiore di 1 — la varietà torica proiettiva associata presenta singolarità quoziente lungo gli strati corrispondenti ai simplessi non unimodulari. La **risoluzione delle singolarità** di X_Σ si traduce così in un problema puramente combinatorio: trovare un raffinamento unimodulare della triangolazione originale, ottenuto inserendo nuovi raggi generati dai punti reticolari interni ai simplessi non unimodulari (un processo diretto analogo, per struttura, allo scoppiamento discusso al §4.6). L'esistenza di una tale triangolazione unimodulare per ogni politopo reticolare è garantita in dimensione 2 ma non in dimensione superiore, dove politopi privi di triangolazioni unimodulari — collegati al fenomeno dei "politopi patologici" di Reeve — costituiscono ostruzioni note alla risoluzione torica delle singolarità.

4.5 Applicazioni Computazionali

Le varietà toriche forniscono un ponte potente tra geometria algebrica e ottimizzazione combinatoria. Il problema della risoluzione delle singolarità può essere affrontato costruendo raffinamenti appropriati del fan. Data una varietà torica X_Σ con singolarità, un raffinamento Σ' del fan Σ (ossia ogni cono di Σ' è contenuto in qualche cono di Σ e la struttura combinatoria è compatibile) induce un morfismo birazionale X_{Σ'} → X_Σ.

Il teorema di risoluzione torica afferma che esiste sempre un raffinamento regolare Σ' tale che X_{Σ'} è liscia. L'algoritmo di costruzione procede identificando i coni singolari (quelli i cui generatori non formano parte di una base di Z^n) e suddividendoli iterativamente mediante raffinamenti stellari.

Nella computer grafica e nella modellazione geometrica, i fan torici parametrizzano famiglie di superfici spline. Una superficie spline razionale in ℝ^3 può essere rappresentata come l'immagine di una mappa razionale da una varietà torica bidimensionale. Le celle del fan corrispondono alle patch polinomiali, e la

condizione di compatibilità ai bordi è automaticamente garantita dalla struttura torica.

Il calcolo dell'omologia e della coorologia di varietà toriche è completamente algoritmico. Le sequenze esatte associate alle stratificazioni toriche permettono di ridurre il calcolo a operazioni combinatoriche sul fan. Per una varietà torica liscia e completa X_Σ, i gruppi di coorologia H^{2k}(X_Σ, Z) sono generati dalle classi dei divisori T-invarianti, con relazioni governate dalle relazioni lineari tra i generatori primitivi dei raggi.

4.6 Esempio: Il Piano Proiettivo Torico e lo Scoppiamento in un Punto

Il caso più semplice e istruttivo di varietà torica è il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$, la cui fan Σ è generata da tre coni bidimensionali in $\mathbb{R}^2$, ciascuno generato da coppie consecutive dei tre vettori primitivi $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $e_3 = (-1,-1)$. Questi tre vettori soddisfano la relazione $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, che riflette algebricamente la relazione lineare tra i tre divisori torici invarianti D_1, D_2, D_3 corrispondenti ai tre raggi della fan: in $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2)$, si ha $D_1 \sim D_2 \sim D_3$, tutti generatori dello stesso gruppo di Picard Z.

Lo scoppiamento (blow-up) di $\mathbb{P}^2$ in un punto fisso, ad esempio nell'origine della carta affine associata al cono generato da e_1 ed e_2, corrisponde a un raffinamento combinatorio della fan: si inserisce un nuovo raggio generato dal vettore $e_4 = e_1 + e_2$, suddividendo il cono originale in due nuovi coni generati rispettivamente da (e_1, e_4) e (e_4, e_2). Geometricamente, questo raffinamento poliedrale introduce un nuovo divisore eccezionale $E = D_4$, con auto-intersezione $E^2 = -1$, mentre i divisori D_1 e D_2 vedono la propria classe modificata secondo la formula standard dello scoppiamento.

Questo esempio, per quanto elementare, cattura il principio generale per cui ogni operazione geometrica sulla varietà torica — scoppiamenti, contrazioni, transizioni flip nella teoria del minimal model program — corrisponde a un'operazione puramente combinatoria sulla fan sottostante: suddivisione, fusione o ricombinazione di coni. Questa traduzione è alla base degli algoritmi computazionali per la classificazione delle varietà toriche di dimensione bassa, che operano interamente a livello di enumerazione poliedrale senza mai risolvere esplicitamente equazioni algebriche.

5. Teoria di Morse Discreta su Complessi Simpliciali

5.1 Complessi Simpliciali e Omologia

Un complesso simpliciale astratto K su un insieme di vertici V è una collezione di sottoinsiemi di V (chiamati simplessi) tale che:

1. Se $\sigma \in K$ e $\tau \subseteq \sigma$, allora $\tau \in K$
2. $\{v\} \in K$ per ogni $v \in V$

La dimensione di un simplesso σ è $\dim(\sigma) = |\sigma| - 1$. Un k-simplesso è un simplesso di dimensione k, ossia un sottoinsieme di k+1 vertici. La dimensione del complesso K è la massima dimensione dei suoi simplessi.

Il gruppo delle k-catene $C_k(K)$ è il gruppo abeliano libero generato dai k-simplessi di K. Un elemento di $C_k(K)$ è una combinazione lineare formale:

$c = \Sigma_{\sigma \in K_k} a_\sigma \sigma$

dove K_k denota l'insieme dei k-simplessi di K e $a_\sigma \in Z$ (o più generalmente coefficienti in un anello commutativo).

L'operatore di bordo $\partial k: C_k(K) \to C\{k-1\}(K)$ è definito mediante:

$\partial k(\sigma) = \Sigma\{i=0\}^k (-1)^i \sigma|_{[v_0,...,\hat{v}_i,...,v_k]}$

dove $\sigma = [v_0, ..., v_k]$ e $\hat{v}_i$ indica l'omissione del vertice v_i. L'operatore di bordo soddisfa la proprietà fondamentale $\partial_{k-1} \circ \partial k = 0$, *che implica* $Im(\partial\{k+1\}) \subseteq \text{Ker}(\partial_k)$.

I gruppi di omologia simpliciale sono definiti come i gruppi quoziente:

$H_k(K) = \text{Ker}(\partial k) / Im(\partial\{k+1\})$

Gli elementi di $\text{Ker}(\partial k)$ *sono detti k-cicli, mentre gli elementi di* $Im(\partial\{k+1\})$ sono k-bordi. L'omologia misura l'ostruzione per un ciclo a essere il bordo di una catena di dimensione superiore, fornendo informazioni topologiche essenziali sulla struttura di K.

5.2 Funzioni di Morse Discrete

La teoria di Morse discreta, sviluppata da Robin Forman, fornisce un analogo combinatorio della teoria di Morse classica per varietà lisce. Una funzione di Morse discreta su un complesso simpliciale K è una funzione $f: K \to \mathbb{R}$ che soddisfa:

1. Per ogni simplesso $\sigma \in K$, il numero di facce $\tau \subset \sigma$ con $f(\tau) \geq f(\sigma)$ è al massimo 1
2. Per ogni simplesso $\sigma \in K$, il numero di cofacce $\varrho \supset \sigma$ con $f(\varrho) \leq f(\sigma)$ è al massimo 1

Queste condizioni garantiscono che f sia "sufficientemente generica" in senso combinatorio. Un simplesso σ è detto critico se tutte le sue facce hanno valore strettamente minore e tutte le sue cofacce hanno valore strettamente maggiore.

Una descrizione equivalente e spesso più conveniente utilizza il concetto di matching discreto. Un matching di Morse su K è un matching M (ossia una collezione di coppie disgiunte) sull'insieme dei simplessi tale che ogni coppia $(\sigma, \tau) \in M$ soddisfa $\sigma \subset \tau$ con $\dim(\tau) = \dim(\sigma) + 1$. I simplessi non accoppiati sono i simplessi critici.

Il gradiente discreto associato al matching M è il grafo orientato il cui insieme di vertici è K e i cui archi sono:

- Per ogni $(\sigma, \tau) \in M$, un arco da τ a σ
- Per ogni faccia propria $\varrho \subset \sigma$ con $(\varrho, \sigma) \notin M$ e $(\sigma, \tau) \in M$ per qualche τ, un arco da τ a ϱ attraverso σ

Un matching è ammissibile (ossia proviene da una funzione di Morse) se e solo se il grafo del gradiente è aciclico.

5.3 Teorema Fondamentale di Morse Discreta

Il teorema principale della teoria di Morse discreta, dimostrato da Forman, stabilisce una connessione profonda tra i punti critici di una funzione di Morse discreta e l'omologia del complesso.

Teorema (Forman): Sia $f: K \to \mathbb{R}$ una funzione di Morse discreta su un complesso simpliciale K, e sia m_k il numero di k-simplessi critici. Allora esistono isomorfismi:

$H_k(K) \cong Z^{m_k} \oplus T_k$

dove T_k è un gruppo di torsione finito.

Più precisamente, il complesso K ha lo stesso tipo di omotopia di un complesso CW con esattamente m_k celle di dimensione k. Questo risultato fornisce un metodo computazionale potente per calcolare l'omologia: invece di operare

sull'intero complesso simpliciale K (che può contenere un numero esponenziale di simplessi), è sufficiente costruire il complesso di Morse ridotto che contiene solo i simplessi critici e ha dimensione drasticamente inferiore.

Le **disuguaglianze di Morse discrete**, analoghe dirette delle classiche disuguaglianze di Morse per funzioni lisce, affermano che per ogni funzione di Morse discreta f su un complesso simpliciale K, il numero m_i di celle critiche di dimensione i soddisfa $m_i \geq b_i(K)$, dove b_i è l'i-esimo numero di Betti, e inoltre la somma alternata $\Sigma_i (-1)^i m_i = \chi(K)$ coincide esattamente con la caratteristica di Eulero del complesso, indipendentemente dalla particolare funzione di Morse discreta scelta. La dimostrazione, dovuta a Forman, procede costruendo un complesso di catene "di Morse" generato liberamente dalle sole celle critiche, con un operatore di bordo modificato che tiene conto dei cammini a gradiente discreto tra celle critiche di dimensione consecutiva; questo complesso ha omologia isomorfa a quella di K, da cui segue immediatamente sia la disuguaglianza (il rango di un gruppo di catene libere non può essere inferiore al rango della sua omologia) sia l'uguaglianza della caratteristica di Eulero (invariante sotto equivalenza omotopica di complessi di catene). Una funzione di Morse discreta è detta **ottimale** o **perfetta** se $m_i = b_i$ per ogni i, ossia se raggiunge il minimo teorico assoluto di celle critiche.

5.4 Algoritmi di Riduzione e Costruzione di Matching

La costruzione di un matching di Morse ottimale (ossia con il minimo numero di celle critiche) è un problema NP-difficile in generale. Tuttavia, esistono euristiche efficienti che producono riduzioni significative nella pratica.

L'algoritmo greedy procede iterativamente accoppiando coppie (σ, τ) di simplessi con $\sigma \subset \tau$ e $\dim(\tau) = \dim(\sigma) + 1$, verificando a ogni passo che non si creino cicli nel grafo del gradiente. La verifica di aciclicità può essere effettuata mediante ricerca in profondità, richiedendo tempo $O(|K|^2)$ per iterazione.

Un'euristica più sofisticata utilizza la teoria dello spanning tree. Per ogni vertice v, si considera il link $\mathrm{Lk}(v) = \{\tau \in K : \tau \cup \{v\} \in K, \tau \cap \{v\} = \varnothing\}$ e lo star $\mathrm{St}(v) = \{\sigma \in K : v \in \sigma\}$. Un matching che preserva la topologia locale può essere costruito garantendo che la contrazione delle coppie accoppiate non alteri l'omologia di Lk(v) per ogni vertice v.

La ricerca di una funzione di Morse discreta ottimale — equivalentemente, di un matching acicilico di Forman con il minimo numero di celle non appaiate — è stata

dimostrata essere NP-ardua per complessi simpliciali generali, un risultato che pone un limite teorico fondamentale all'ambizione di semplificare automaticamente ogni mesh alla sua struttura topologica minimale in tempo polinomiale. In pratica, questa ostruzione teorica viene aggirata mediante euristiche efficienti: l'algoritmo del **discrete Morse casuale** (random discrete Morse), che costruisce il matching mediante scelte greedy randomizzate seguite da fasi di raffinamento locale, produce empiricamente risultati prossimi all'ottimo su mesh cartografiche reali pur non garantendo l'ottimalità globale. Per complessi di dimensione limitata a 2 (il caso rilevante per mesh triangolari di superfici), esistono inoltre algoritmi polinomiali basati su flussi massimi che calcolano matching ottimali sfruttando la struttura duale del problema come accoppiamento su un grafo bipartito associato al complesso, rendendo trattabile in pratica proprio il caso d'uso cartografico discusso al §5.6.

5.5 Applicazioni all'Analisi Topologica di Mesh Cartografiche

Le mesh cartografiche, utilizzate in sistemi informativi geografici (GIS) e nella modellazione del terreno, sono naturalmente rappresentate come complessi simpliciali embedded in $\mathbb{R}^3$. Una mesh triangolare di un terreno è un complesso simpliciale bidimensionale dove:

- I 0-simplessi (vertici) corrispondono a punti campionati con coordinate (x, y, z)
- Gli 1-simplessi (archi) connettono coppie di vertici adiacenti
- I 2-simplessi (triangoli) rappresentano le facce della superficie

La teoria di Morse discreta permette di analizzare la struttura topologica del terreno identificando elementi caratteristici:

- **Minimi locali** (0-simplessi critici con funzione altezza): depressioni, laghi, crateri
- **Selle** (1-simplessi critici): passi montani, colli tra valli
- **Massimi locali** (2-simplessi critici): vette, picchi

La costruzione di un matching di Morse basato sulla funzione altezza z produce automaticamente una segmentazione gerarchica del terreno in regioni idrologiche. Le linee di flusso seguono il gradiente discreto discendente, convergendo verso i minimi critici che rappresentano i bacini idrografici.

Il calcolo della persistenza dei punti critici, mediante la teoria dell'omologia persistente (discussa nella sezione successiva), permette di filtrare elementi topologici a diverse scale. Punti critici con bassa persistenza corrispondono a artefatti del campionamento o rumore nei dati, mentre quelli con alta persistenza rappresentano caratteristiche geografiche significative.

Gli algoritmi di semplificazione della mesh possono essere guidati dalla teoria di Morse: si rimuovono iterativamente coppie di simplessi accoppiati nel matching, garantendo che la topologia globale sia preservata. Questo approccio produce mesh multisoluzione ottimali per il rendering e l'analisi a diverse scale.

5.6 Esempio: Semplificazione di un Modello Digitale del Terreno

Un'applicazione diretta della teoria di Morse discreta alla cartografia computazionale riguarda la semplificazione di un modello digitale del terreno (DTM) rappresentato come complesso simpliciale triangolare con valori di quota associati ai vertici. Assegnando a ogni vertice v la funzione f(v) = quota(v) e costruendo una funzione di Morse discreta compatibile mediante l'algoritmo di matching di Forman, si identificano le celle critiche del complesso: i vertici critici corrispondono a minimi locali del terreno (fondovalle, pozzi di drenaggio), gli spigoli critici a passi di sella (valichi), e i triangoli critici a massimi locali (cime).

Il numero di celle critiche di ciascuna dimensione fornisce direttamente i numeri di Betti del complesso — nel caso tipico di un DTM privo di cavità (genere topologico nullo per la superficie), un solo vertice critico e un solo triangolo critico sono teoricamente necessari, mentre il numero di spigoli critici in eccesso rispetto al minimo teorico misura la complessità morfologica reale del terreno (numero di bacini idrografici distinti, dorsali multiple).

L'algoritmo di riduzione di Morse discreta procede cancellando iterativamente coppie di celle non critiche connesse da un'unica freccia di matching V, un'operazione che preserva esattamente il tipo di omotopia del complesso. Applicato a un DTM con centinaia di migliaia di triangoli, questo processo riduce la mesh a una rete di Morse-Smale contenente solo le strutture topologicamente significative — creste, valli e la loro connettività — permettendo una rappresentazione compressa del rilievo che preserva esattamente la struttura del reticolo idrografico e orografico, con un fattore di compressione tipicamente superiore a 100:1 rispetto alla mesh originale, a parità di fedeltà topologica.

6. Omologia Persistente Direzionale

6.1 Omologia Persistente Classica

L'omologia persistente è uno strumento fondamentale nell'analisi topologica dei dati (TDA) che studia l'evoluzione delle caratteristiche topologiche attraverso una filtrazione di complessi simpliciali. Una filtrazione è una sequenza crescente:

$K_0 \subseteq K_1 \subseteq ... \subseteq K_m = K$

di sottocomplessi simpliciali. A ogni inclusione $K_i \subseteq K_{i+1}$ corrisponde un omomorfismo indotto in omologia:

$f_i^{i+1}: H_k(K_i) \rightarrow H_k(K_{i+1})$

La sequenza di gruppi e omomorfismi forma un modulo di persistenza:

$H_k(K_0) \rightarrow H_k(K_1) \rightarrow ... \rightarrow H_k(K_m)$

Un elemento $\alpha \in H_k(K_i)$ nasce all'indice i se $\alpha \notin Im(f_{i-1}^i)$ e muore all'indice $j > i$ se $f_i^j(\alpha)$ diventa zero in $H_k(K_j)$ ma non in $H_k(K_{j-1})$. La differenza j - i è la persistenza di α.

Il teorema di struttura per moduli di persistenza, conseguenza della decomposizione di moduli su anelli a ideali principali, afferma che ogni modulo di persistenza su un campo si decompo ne come somma diretta di moduli intervallo:

$H_k(K_\bullet) \cong \oplus_{j} I[b_j, d_j]$

dove I[b, d] denota il modulo che è il campo base negli indici da b a d-1 e zero altrove. Le coppie (b_j, d_j) formano il diagramma di persistenza o barcode, una rappresentazione visuale delle caratteristiche topologiche e della loro durata.

6.2 Omologia Persistente Direzionale: Motivazione Geometrica

L'omologia persistente classica tratta simmetricamente tutte le direzioni nello spazio. Tuttavia, in molti contesti applicativi, specialmente nell'analisi di dati geografici, esistono direzioni preferenziali che codificano informazioni strutturali essenziali.

Consideriamo una mesh cartografica che rappresenta un terreno montuoso. La direzione verticale (gravità) ha un significato fisico privilegiato: i fiumi scorrono verso il basso, le valli si estendono longitudinalmente, le catene montuose si orientano secondo direzioni tettoniche specifiche. L'omologia persistente standard,

costruita mediante filtrazione per raggi crescenti attorno a punti (complessi di Vietoris-Rips) o per valori crescenti di una funzione scalare, non cattura esplicitamente queste anisotropie direzionali.

L'omologia persistente direzionale estende il framework classico introducendo filtrazioni parametrizzate da direzioni nello spazio ambiente. Data una direzione unitaria $v \in S^{n-1}$ in $\mathbb{R}^n$, si costruisce una filtrazione ordinando i simplessi secondo la proiezione dei loro baricentri sulla direzione v.

6.3 Costruzione Formale e Zigzag Persistence

Sia K un complesso simpliciale embedded in $\mathbb{R}^n$, e sia $v \in S^{n-1}$ una direzione fissata. Per ogni simplesso $\sigma \in K$, sia $h_v(\sigma) = \langle \text{barycenter}(\sigma), v \rangle$ la proiezione del baricentro di σ sulla direzione v.

La filtrazione direzionale rispetto a v è definita ordinando i valori $\{h_v(\sigma) : \sigma \in K\}$ come $t_0 < t_1 < ... < t_m$ e ponendo:

$K_i^v = \{\sigma \in K : h_v(\sigma) \leq t_i\}$

Questa costruzione non garantisce che K_i^v sia un sottocomplesso di K (un simplesso potrebbe avere baricentro con proiezione inferiore a quella di alcune sue facce). Per ottenere una filtrazione valida, si procede in due modi:

1. **Chiusura inferiore**: si definisce $\tilde{K}_i^v$ come il minimo sottocomplesso contenente tutti i simplessi σ con $h_v(\sigma) \leq t_i$
2. **Zigzag persistence**: si utilizza la teoria della zigzag persistence che permette di trattare sequenze dove le inclusioni possono essere invertite

La zigzag persistence considera diagrammi della forma:

$V_0 \rightarrow V_1 \leftarrow V_2 \rightarrow V_3 \leftarrow ... \leftarrow V_m$

dove le frecce possono andare in entrambe le direzioni. Il teorema di decomposizione di Gabriel-Carlsson afferma che anche questi moduli ammettono una decomposizione in moduli intervallo, producendo un diagramma di persistenza generalizzato.

Un esempio elementare di modulo zigzag chiarisce la costruzione: si consideri una sequenza di cinque spazi topologici connessi tra loro da inclusioni alternate $X_1 \hookrightarrow X_2 \hookleftarrow X_3 \hookrightarrow X_4 \hookleftarrow X_5$, dove X_1, X_3, X_5 sono tre punti isolati e X_2, X_4 sono segmenti che connettono coppie diverse di questi punti. Applicando

l'omologia di grado 0 con coefficienti in un campo, si ottiene una sequenza zigzag di spazi vettoriali $H_0(X_1) \to H_0(X_2) \leftarrow H_0(X_3) \to H_0(X_4) \leftarrow H_0(X_5)$ le cui dimensioni fluttuano tra 1 e 3 a seconda che i punti vengano connessi o rimangano isolati nei singoli passi. Il teorema di struttura per i moduli zigzag, analogo al teorema di struttura per i moduli di persistenza standard, garantisce che questo modulo si decompone in modo unico come somma diretta di moduli a intervallo, ciascuno corrispondente a una barra del codice a barre zigzag: una barra che copre l'intero intervallo [1,5] indica una componente connessa persistente attraverso tutte le alternanze di inclusione e restrizione, mentre barre corte segnalano componenti che compaiono e scompaiono localmente nella sequenza.

6.4 Vineyard Algorithm e Variazione Continua della Direzione

Un aspetto cruciale dell'omologia persistente direzionale è lo studio della variazione del diagramma di persistenza al variare della direzione v. L'algoritmo del vineyard, sviluppato da Cohen-Steiner, Edelsbrunner e Harer, permette di tracciare efficientemente questa evoluzione.

L'idea fondamentale è che per la maggior parte delle direzioni v, il diagramma di persistenza è stabile, ma esistono direzioni critiche dove avvengono eventi combinatorici: due simplessi scambiano il loro ordinamento nella filtrazione. Questi eventi corrispondono geometricamente a direzioni v per cui la proiezione $h_v(\sigma_1) = h_v(\sigma_2)$ per qualche coppia di simplessi distinti σ_1, σ_2.

L'insieme delle direzioni critiche forma un insieme finito di sottoinsiemi S^{n-1} di codimensione 1 (grandi cerchi per n=3). Tra direzioni critiche consecutive, il diagramma di persistenza varia continuamente mediante transizioni locali dove coppie di punti (nascita, morte) si fondono o si separano.

L'algoritmo procede:

1. Inizializzazione: calcolare il diagramma di persistenza $D(v_0)$ per una direzione iniziale v_0
2. Per ogni direzione critica v_c attraversata:
    - Identificare la coppia di simplessi (σ_i, σ_j) che scambia ordinamento
    - Aggiornare il diagramma mediante una trasformazione locale che modifica le barre di persistenza coinvolte
3. Memorizzare la traccia risultante: un "vineyard" dove ogni barra evolve come una curva parametrizzata dalla direzione

La complessità computazionale è $O(n^2\beta^2)$ dove n è il numero di simplessi e β è il numero massimo di barre di persistenza in ogni diagramma.

Dal punto di vista computazionale, l'algoritmo del vineyard (Cohen-Steiner, Edelsbrunner e Morozov) sfrutta il fatto che, quando due colonne adiacenti nella matrice di bordo ridotta vengono scambiate a seguito di una perturbazione infinitesima del parametro di filtrazione, l'aggiornamento della decomposizione di persistenza richiede unicamente un numero costante di operazioni di algebra lineare locali (nella maggior parte dei casi una singola trasposizione di colonne), anziché il ricalcolo completo della matrice ridotta, che costerebbe O(n^3) nel caso peggiore. Questo rende il costo totale per tracciare l'evoluzione del codice a barre lungo una famiglia continua di N transposizioni pari a O(N) operazioni ammortizzate oltre al costo del calcolo iniziale, rendendo praticabile il campionamento denso dell'angolo θ necessario per l'analisi direzionale del §6.5-6.6 anche su dataset geografici di dimensioni considerevoli.

6.5 Applicazioni a Dati Geografici con Orientazioni Preferenziali

L'omologia persistente direzionale trova applicazioni naturali nell'analisi di fenomeni geografici anisotropi:

Analisi di bacini idrografici: Filtrando il terreno lungo la direzione verticale discendente, si identificano le valli principali come componenti connesse persistenti in dimensione 0. La persistenza corrisponde al dislivello tra il punto più alto del bacino e il suo sbocco. Variando la direzione attorno alla verticale, si catturano asimmetrie nella morfologia delle valli.

Rilevamento di strutture tettoniche: Catene montuose generate da processi tettonici presentano allineamenti preferenziali. Analizzando la persistenza in H_1 (cicli) al variare della direzione di filtrazione, si identificano orientazioni dominanti. Picchi nella funzione persistenza(v) indicano direzioni lungo cui le strutture cicliche (valli anulari, dorsali chiuse) sono più pronunciate.

Urbanistica e reti stradali: In contesti urbani, le strade seguono spesso griglie orientate. La persistenza direzionale in dimensione 1 rivela le direzioni principali della griglia stradale. La stabilità del diagramma rispetto a perturbazioni della direzione quantifica quanto rigidamente la rete è orientata.

Analisi di correnti oceaniche: Dati di temperatura o salinità oceanica, rappresentati come complessi simpliciali mediante triangolazioni di Delaunay di

punti campionati, presentano strutture correlate con le direzioni delle correnti. La persistenza direzionale identifica filamenti persistenti (componenti in H_0) e strutture vorticose (cicli in H_1) allineate con le correnti dominanti.

La computazione pratica richiede strategie di campionamento delle direzioni. Invece di esplorare l'intera sfera S^{n-1}, si utilizza un insieme discreto di direzioni ben distribuite (ad esempio, i vertici di un politopo regolare inscritto in S^{n-1}), calcolando il diagramma per ciascuna e interpolando i risultati mediante la teoria della stabilità dei diagrammi di persistenza.

6.6 Esempio: Rilevamento di Strutture Lineari in un Campo di Precipitazioni

L'omologia persistente direzionale trova un'applicazione naturale nell'analisi di campi scalari geografici con anisotropie intrinseche, come i campi di precipitazione associati a fronti meteorologici. Un fronte di precipitazione intensa presenta tipicamente una struttura allungata lungo una direzione preferenziale, corrispondente all'orientazione del sistema frontale, mentre l'omologia persistente classica — isotropa per costruzione — tende a rappresentare tali strutture come insiemi di componenti connesse separate piuttosto che riconoscerne la coerenza direzionale.

Applicando la filtrazione direzionale $f_\theta(x) = \langle x, u_\theta \rangle + \lambda \cdot g(x)$, dove g è il campo di intensità delle precipitazioni e u_θ il versore della direzione θ, si costruisce una famiglia di diagrammi di persistenza parametrizzata dall'angolo. Il vineyard risultante mostra, per la direzione θ allineata con l'asse del fronte, una barra di persistenza anomalmente lunga nel grado omologico 0, corrispondente a una singola componente connessa dominante che attraversa l'intero dominio di osservazione; per direzioni θ ortogonali a tale asse, la stessa struttura si frammenta in molteplici componenti di persistenza breve.

Questa asimmetria nel comportamento delle barre di persistenza al variare di θ costituisce un descrittore quantitativo robusto dell'orientazione del fronte, calcolabile senza necessità di segmentazione manuale o di modelli fisici a priori sulla dinamica atmosferica. La direzione θ^* che massimizza la persistenza della barra dominante nel grado 0 approssima l'orientazione principale del sistema frontale, un risultato utile sia per l'analisi retrospettiva di eventi meteorologici estremi sia, in linea di principio, come feature geometrica in pipeline di nowcasting automatizzato.

7. Politopi di Newton e Amoebe: Famiglie Parametriche di Proiezioni

7.1 Il Politopo di Newton di un Polinomio

Dato un polinomio f in n variabili con coefficienti complessi:

$f(x_1, ..., x_n) = \Sigma_{\alpha \in A} c_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot x_n^{\alpha_n}$

dove $A \subset Z^n_{\geq 0}$ è un insieme finito di multi-indici e $c_\alpha \in C^*$ sono coefficienti non nulli, il politopo di Newton di f è definito come l'involucro convesso dei multi-indici che compaiono in f:

$Newt(f) = conv(A) \subset \mathbb{R}^n$

Questo politopo codifica informazioni combinatoriche essenziali sulla struttura del polinomio e, sorprendentemente, controlla proprietà algebriche e geometriche profonde dell'ipersuperficie $V(f) = \{x \in (C^*)^n : f(x) = 0\}$.

La dimensione del politopo Newt(f) fornisce informazioni sulla degenerazione del polinomio: se $dim(Newt(f)) < n$, il polinomio è effettivamente in meno variabili dopo un cambio di coordinate monomiale appropriato.

Le facce del politopo di Newton corrispondono a specializzazioni del polinomio. Data una faccia $F \subset Newt(f)$, il polinomio facciale f_F è definito come:

$f_F(x) = \Sigma_{\alpha \in F \cap Z^n} c_\alpha x^\alpha$

Questo polinomio rappresenta i termini di f "dominanti" rispetto a un opportuno ordinamento determinato da F.

7.2 Teorema di Bernstein-Kushnirenko

Il teorema di Bernstein-Kushnirenko stabilisce una connessione fondamentale tra la geometria combinatorica dei politopi di Newton e la teoria dell'intersezione algebrica. Questo teorema fornisce una formula esplicita per il numero di soluzioni di sistemi polinomiali in termini dei volumi misti dei politopi di Newton.

Teorema (Bernstein-Kushnirenko): Sia $f_1, ..., f_n$ un sistema di n polinomi in n variabili con coefficienti generici, e siano $P_1 = Newt(f_1), ..., P_n = Newt(f_n)$ i loro politopi di Newton. Allora il numero di soluzioni isolate in $(C^*)^n$ del sistema:

$f_1(x) = ... = f_n(x) = 0$

è esattamente il volume misto n-dimensionale V_n(P_1, ..., P_n).

Il volume misto è definito mediante la formula di polarizzazione della funzione volume:

V_n(P_1, ..., P_n) = (1/n!) · ∂^n/∂λ_1...∂λ_n Vol(λ_1 P_1 + ... + λ_n P_n)|_{λ_1=...=λ_n=0}

dove λ_1 P_1 + ... + λ_n P_n denota la somma di Minkowski dei politopi scalati.

Per politopi identici P_1 = ... = P_n = P, il volume misto si riduce a n! Vol(P), recuperando il teorema di Bézout come caso speciale: se tutti i polinomi hanno lo stesso grado d (ossia Newt(f_i) = d·Δ_n dove Δ_n è il simplesso standard), il numero di soluzioni è d^n.

Una dimostrazione concettuale del teorema di Bernstein-Kushnirenko procede attraverso la geometria delle varietà toriche: dato un sistema di n polinomi generici f_1, \..., f_n in n variabili con politopi di Newton P_1, \..., P_n, si costruisce la varietà torica proiettiva X_Σ associata al politopo somma di Minkowski P = P_1 + \... + P_n (o, più precisamente, alla fan normale comune raffinata). Ciascun polinomio f_i, opportunamente omogeneizzato, definisce un divisore ampio D_i su X_Σ corrispondente al proprio politopo di Newton, e il numero di soluzioni del sistema in (C*)^n coincide esattamente con il numero di intersezione D_1 · D_2 · \... · D_n calcolato sulla varietà torica. La teoria dell'intersezione sulle varietà toriche, sviluppata combinatoriamente in termini di volumi misti di politopi (cfr. §4.3-4.4), fornisce allora l'identità D_1 · \... · D_n = n! · MV(P_1, \..., P_n), che è precisamente l'enunciato del teorema. Questa dimostrazione, oltre a stabilire il risultato, chiarisce perché il teorema di Bernstein-Kushnirenko sia essenzialmente un caso particolare della teoria delle intersezioni toriche applicata a divisori associati a politopi di Newton — un ulteriore esempio del principio di sintesi discusso al capitolo 8.

7.3 Amoebe e Logaritmic Limit Sets

L'ameba di un'ipersuperficie algebrica V ⊂ (C*)^n è l'immagine di V sotto la mappa di logaritmo delle norme:

Log: (C*)^n → ℝ^n, Log(z_1, ..., z_n) = (log|z_1|, ..., log|z_n|)

Formalmente, l'ameba di V è l'insieme:

$A_V = \mathrm{Log}(V) = \{(\log|z_1|, ..., \log|z_n|) : (z_1, ..., z_n) \in V\} \subset \mathbb{R}^n$

Le amoebe sono oggetti geometrici affascinanti con una struttura ricca. Topologicamente, un'ameba consiste in una collezione di componenti connesse limitate (chiamate "tentacoli") che si estendono verso l'infinito in direzioni specifiche, connesse da una regione centrale compatta.

Il teorema fondamentale sulle amoebe, dovuto a Gelfand, Kapranov e Zelevinsky, afferma che il complementare di un'ameba A_V in $\mathbb{R}^n$ è un'unione di componenti connesse convesse. Ogni componente convessa corrisponde a un vertice del politopo di Newton Newt(f) dove f è un polinomio che definisce V.

Il contorno dell'ameba (la chiusura della frontiera tra diverse componenti del complementare) è strettamente correlato alla curva tropicale: quando si effettua un rescaling moltiplicando i coefficienti c_α per $t^{\mathrm{Re}(\alpha)}$ e si considera il limite $t \to 0$, l'ameba converge al politopo di Newton, mentre il suo contorno converge all'ipersuperficie tropicale V(trop(f)).

L'esempio più semplice ed esplicito di ameba è offerto da una retta generica in $(C^*)^2$, definita da $f(x,y) = a + bx + cy$. La sua ameba $A(f) \subset \mathbb{R}^2$ è una regione con tre code asintotiche che si allontanano verso l'infinito lungo le direzioni (-1,0), (0,-1) e (1,1) — esattamente le normali ai lati del triangolo di Newton della retta, in coerenza col teorema di Kapranov — e con una regione centrale limitata di area finita che si restringe a un punto (il grafo tropicale della retta, un vertice trivalente bilanciato) nel limite di deamplificazione $t \to 0$ applicato ai coefficienti a, b, c riscalati come a(t), b(t), c(t) con valutazioni divergenti. Questo esempio, per quanto elementare, rende visivamente concreto il teorema di Kapranov nella sua forma più immediata: al crescere del parametro di deformazione, l'ameba "si assottiglia" attorno al proprio scheletro tropicale, un fenomeno osservabile numericamente tracciando $A(f_t)$ per valori decrescenti di t e confrontando la sequenza di immagini con la retta tropicale limite.

7.4 Teorema di Kapranov sulla Complementarietà Ameba-Tropicale

Il teorema di complementarietà di Kapranov formalizza la relazione tra amoebe e varietà tropicali. Sia $V_t \subset (C^*)^n$ una famiglia di ipersuperfici parametrizzata da t, definita da:

$f_t(x) = \Sigma_\alpha\, c_\alpha\, t^{h(\alpha)}\, x^\alpha = 0$

dove $h: A \to \mathbb{R}$ è una funzione di "altezza" sui multi-indici.

Teorema (Kapranov): Quando $t \to 0$, l'ameba rescalata $(1/\log t) \cdot A_{V_t}$ converge nella metrica di Hausdorff all'ipersuperficie tropicale $V(\mathrm{trop}(f))$ dove $\mathrm{trop}(f)$ è il polinomio tropicale con coefficienti:

$$\mathrm{trop}(f)(x) = \bigoplus_{\alpha} h(\alpha) \otimes x^{\alpha} = \min_{\alpha} \{h(\alpha) + \langle \alpha, x \rangle\}$$

Questo risultato fornisce una giustificazione profonda per considerare la geometria tropicale come il "limite logaritmico" della geometria algebrica classica. Le operazioni min e + emergono naturalmente come limiti delle operazioni moltiplicazione e addizione dopo rescaling logaritmico.

La dimostrazione del teorema utilizza tecniche di analisi asintotica sul comportamento delle funzioni olomorfe vicino a ipersuperfici. La chiave è l'osservazione che, in coordinate logaritmiche, l'equazione $f_t(x) = 0$ diventa:

$$\sum_{\alpha} c_{\alpha} t^{h(\alpha)} \exp(\langle \alpha, \xi \rangle) = 0$$

dove $x_i = \exp(\xi_i)$. Per t piccolo, i termini dominanti sono quelli con $h(\alpha)$ minimo lungo la direzione ξ, conducendo alla condizione tropicale.

7.5 Applicazioni alle Famiglie Parametriche di Proiezioni

I politopi di Newton e le amoebe trovano applicazioni in contesti dove si studiano famiglie continue di proiezioni geometriche. Consideriamo il problema della visibilità computazionale: data una scena tridimensionale composta da superfici algebriche, determinare quali parti sono visibili da un punto di osservazione che varia.

Ogni configurazione di osservatore e oggetti definisce una proiezione prospettica, che algebricamente corrisponde a una mappa razionale da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$. Le curve di contorno apparente (dove la superficie è tangente al piano di proiezione) sono determinate dall'annullamento di determinanti di matrici jacobiane, producendo ipersuperfici algebriche.

Al variare del punto di osservazione, i politopi di Newton di queste equazioni determinanti evolvono, e il teorema di Bernstein-Kushnirenko predice il numero di punti critici della proiezione. Le transizioni topologiche (dove componenti del contorno apparente si fondono o si separano) avvengono quando il politopo di Newton subisce cambiamenti combinatorici.

Nella programmazione lineare parametrica, si considera una famiglia di problemi di ottimizzazione:

minimizza c(t)^T x soggetto a A(t)x ≤ b(t)

dove i parametri variano linearmente con t. Le regioni di ammissibilità sono definite da intersezioni di semispazi, e i loro volumi sono funzioni polinomiali di t. I politopi di Newton di queste funzioni polinomiali codificano la struttura combinatorica dello spazio dei parametri.

Nell'analisi di stabilità di sistemi dinamici polinomiali:

$\dot{x} = f(x, \lambda)$

dove $\lambda \in \mathbb{R}^m$ è un vettore di parametri, le biforcazioni avvengono quando polinomi caratteristici hanno radici multiple. I discriminanti (risultanti rispetto a variabili) che determinano le superfici di biforcazione hanno politopi di Newton la cui struttura rivela il numero e la disposizione delle regioni di stabilità nello spazio dei parametri.

Le amoebe forniscono una visualizzazione geometrica di queste regioni: ogni componente convessa del complementare dell'ameba corrisponde a una regione dello spazio dei parametri dove il sistema ha un comportamento qualitativo specifico. La transizione attraverso un tentacolo dell'ameba corrisponde a una biforcazione.

Algoritmi computazionali per l'enumerazione delle celle del complementare dell'ameba si basano sulla triangolazione del politopo di Newton. Ogni simplesso della triangolazione determina una regione convessa, e la connettività tra regioni è determinata dalla struttura combinatorica della triangolazione. L'algoritmo procede costruendo il grafo duale della triangolazione e verificando per ogni arco se corrisponde a un attraversamento del contorno dell'ameba mediante verifica numerica dell'esistenza di soluzioni dell'equazione f(x) = 0 in quella regione logaritmica.

7.6 Esempio: Il Politopo di Newton della Cubica Nodale

Consideriamo il polinomio f(x,y) = y^2 - x^3 - x^2, che definisce una cubica piana nodale con singolarità nell'origine. Il politopo di Newton N(f) è l'inviluppo convesso dei tre punti (0,2), (3,0), (2,0) nel piano degli esponenti, formando un triangolo di area 3 (nell'unità normalizzata in cui il simplesso standard ha area 1/2,

corrispondente a volume normalizzato 3 secondo la convenzione usuale in geometria tossica). Per il teorema di Bernstein-Kushnirenko applicato al sistema {f, $\partial f/\partial x$} — utile per localizzare i punti singolari della curva — il numero di soluzioni in $(C^*)^2$ è delimitato dal volume misto dei rispettivi politopi di Newton, fornendo un limite superiore combinatorio al numero di punti singolari senza risolvere esplicitamente il sistema.

L'ameba A(f) di questa curva, immagine della curva algebrica tramite la mappa Log, presenta una struttura a "stella" con tre code asintotiche che si allontanano dall'origine lungo direzioni corrispondenti ai tre lati del triangolo di Newton — precisamente le normali esterne ai lati del politopo, in accordo con il teorema di Kapranov. Il logaritmic limit set $A_\infty(f)$, ottenuto riscalando l'ameba e prendendone il limite, coincide esattamente con l'unione di tre semirette che formano il complemento combinatorio del politopo di Newton triangolato: la biiezione tra le due-celle limitate del complemento dell'ameba e i punti reticolari interni al politopo (in questo caso, nessuno, essendo il triangolo privo di punti interni oltre ai vertici, coerentemente con il genere zero della cubica nodale) fornisce un criterio combinatorio diretto per determinare il numero di componenti connesse limitate del complemento dell'ameba — informazione che, per curve di grado superiore, è centrale nello studio delle famiglie parametriche di proiezioni cartografiche a bassa distorsione, dove il numero di regioni di regolarità della proiezione è governato da un invariante combinatorio identico.

8. Sintesi Interdisciplinare: Un Dizionario Combinatorio-Algebrico

8.1 Il Principio Unificante della Dequantizzazione

Le sette aree esplorate in questo paper, per quanto apparentemente eterogenee nei loro oggetti di studio — semianelli, grafi metrici, Grassmanniane, fan poliedrali, complessi simpliciali, diagrammi di persistenza, politopi di Newton — condividono un principio metodologico comune: la sostituzione di strutture algebriche continue con controparti combinatorie discrete che ne preservano gli invarianti essenziali. Questo principio, che nella geometria tropicale assume la forma esplicita della dequantizzazione mediante il limite $t \to 0$ della valutazione logaritmica, si manifesta in forma analoga, seppur meno esplicitamente algebrica, anche negli altri sei ambiti trattati.

Nella teoria di Morse discreta, la "dequantizzazione" consiste nel sostituire una funzione liscia su una varietà con una funzione discreta su un complesso

simpliciale, preservando i numeri di Betti e la struttura degli invarianti topologici. Nell'omologia persistente, il parametro continuo di filtrazione viene discretizzato in una sequenza finita di eventi di nascita e morte, senza perdita dell'informazione topologica essenziale. Nelle varietà toriche, l'intera struttura algebrica della varietà viene codificata in un oggetto puramente combinatorio — la fan — senza residuo di informazione analitica.

8.2 Tabella Comparativa degli Invarianti Discreti

Per rendere esplicito il parallelismo strutturale tra le sette teorie, è utile osservare che ciascuna associa a un oggetto geometrico continuo un invariante combinatorio finito che ne governa il comportamento qualitativo: il rango tropicale per i sistemi lineari tropicali, il genere g = \|E\| - \|V\| + 1 per i grafi metrici, il politopo del matroide per le configurazioni lineari, la fan per le varietà toriche, i numeri di Betti (o il numero di celle critiche) per i complessi simpliciali, il codice a barre di persistenza per i dati filtrati, e il volume misto dei politopi di Newton per i sistemi polinomiali. In ogni caso, il passaggio dall'oggetto continuo all'invariante discreto comporta una riduzione di complessità computazionale che rende trattabili problemi altrimenti intrattabili nel dominio continuo, preservando al contempo l'informazione strutturale rilevante per le applicazioni.

8.3 Implicazioni per la Cartografia Matematica Computazionale

Un filo conduttore che attraversa trasversalmente più capitoli di questo paper — esplicito nelle applicazioni alle reti stradali (§2.5-2.6), alla semplificazione di modelli digitali del terreno (§5.5-5.6) e all'analisi di dati geografici direzionali (§6.5-6.6) — è la rilevanza diretta di questi strumenti combinatorico-algebrici per la cartografia matematica computazionale. La rappresentazione discreta di superfici terrestri, reti di trasporto e campi geofisici mediante strutture combinatorie (grafi metrici, complessi simpliciali, filtrazioni) non è una semplice comodità computazionale ma riflette la natura intrinsecamente discreta dei dati geografici moderni, acquisiti tipicamente come nuvole di punti, mesh triangolate o griglie campionate.

In questo senso, gli approcci qui presentati suggeriscono un programma di ricerca coerente: lo sviluppo di una teoria delle proiezioni cartografiche che tratti esplicitamente la discretizzazione non come un'approssimazione dell'oggetto continuo (la superficie terrestre liscia) ma come struttura primaria, con i corrispondenti invarianti combinatori — genere dei grafi di rete, politopi di Newton delle famiglie di proiezioni, codici a barre di persistenza delle distorsioni

— trattati come oggetti di studio a pieno titolo, in linea con l'evoluzione più ampia della geometria computazionale verso paradigmi discreti.

9. Metodi Computazionali e Complessità: Un'Analisi Trasversale

9.1 Classi di Complessità Ricorrenti

Un'osservazione trasversale a tutti i capitoli precedenti riguarda la distribuzione ricorrente di problemi computazionalmente difficili all'interno di ciascuna teoria, spesso in netto contrasto con la trattabilità dei problemi ad essi strettamente imparentati. Il calcolo esatto del rango tropicale di una matrice (§1.5) è noto essere NP-arduo, mentre il calcolo del rango di Barvinok, apparentemente simile, è polinomiale; la ricerca di una funzione di Morse discreta ottimale (§5.4) è NP-arduo in generale, mentre la verifica che un dato matching sia aciclico è immediata; il calcolo esatto del volume misto di politopi — quantità centrale nel teorema di Bernstein-Kushnirenko (§7.2) — è stato dimostrato essere #P-arduo, collocandolo nella stessa classe di difficoltà del calcolo del permanente di una matrice, pur essendo approssimabile in tempo polinomiale con garanzie probabilistiche di errore. Questa ricorrenza di coppie "problema facile / problema arduo" strutturalmente vicine non è casuale: in ciascun caso, la difficoltà computazionale emerge nel momento in cui si richiede un'informazione **esatta** su una struttura ottimale (un rango minimo, un matching minimale, un volume preciso), mentre le versioni **decisionali** o **approssimate** dello stesso problema restano spesso trattabili.

Un secondo pattern ricorrente riguarda la dicotomia tra rappresentazione combinatoria esplicita e complessità di enumerazione: il numero di matroidi rappresentabili su un insieme di n elementi, il numero di triangolazioni unimodulari di un politopo reticolare, o il numero di celle in una subdivisione del Dressian (§3.3) crescono tutti in modo super-esponenziale in n, rendendo l'enumerazione esaustiva impraticabile ben oltre valori di n a due cifre. Gli algoritmi efficaci in questi ambiti procedono quasi sempre per costruzione incrementale guidata da euristiche (reverse search, algoritmi di tipo branch-and-bound specializzati, o campionamento randomizzato dello spazio delle configurazioni), piuttosto che per enumerazione diretta.

9.2 Strumenti Software per la Geometria Combinatorico-Algebrica

La maturazione computazionale di queste teorie negli ultimi due decenni è stata accompagnata dallo sviluppo di un ecosistema di software specializzato, oggi

essenziale per la ricerca applicata in questi ambiti. Per la geometria tropicale e il calcolo di varietà tropicali a partire da ideali polinomiali, gli strumenti dedicati al calcolo di fan di Gröbner e alla tropicalizzazione esplicita di varietà algebriche permettono di calcolare direttamente le strutture poliedrali discusse al capitolo 1, tipicamente integrati con sistemi di algebra computazionale generalisti per il calcolo di basi di Gröbner e ideali di eliminazione. Per la manipolazione di politopi, fan e le loro triangolazioni (capitoli 3-4 e 7), esistono librerie dedicate al calcolo di facce, volumi, volumi misti e triangolazioni unimodulari, capaci di gestire politopi con centinaia di vertici in dimensioni moderate. Il calcolo di triangolazioni regolari e non regolari di configurazioni di punti — di rilevanza diretta per lo studio del Dressian e delle subdivisioni di matroidi (§3.3) — è supportato da strumenti specializzati nella enumerazione dello spazio secondario delle triangolazioni.

Per l'omologia persistente e la sua variante direzionale (capitolo 6), librerie dedicate al calcolo efficiente di complessi filtrati (mediante complessi di Čech, Vietoris-Rips o cubici) e alla riduzione della matrice di bordo mediante algoritmi a matrice sparsa ottimizzati permettono oggi il calcolo di codici a barre su dataset con milioni di punti, un requisito essenziale per le applicazioni a dati geografici ad alta risoluzione discusse al §6.5-6.6. Per la teoria di Morse discreta su mesh cartografiche (capitolo 5), implementazioni dell'algoritmo random discrete Morse e delle sue varianti guidate da funzioni di elevazione sono integrate in strumenti di analisi topologica di terreno utilizzati sia in ambito accademico sia nei sistemi informativi geografici di produzione.

9.3 Prospettive: Verso un Ecosistema Computazionale Unificato

Nonostante la maturità dei singoli strumenti settoriali, l'interfaccia tra i diversi ambiti computazionali qui rassegnati resta in gran parte manuale: il trasferimento di una struttura combinatoria calcolata in un contesto (ad esempio un fan di Gröbner) verso un altro (ad esempio un'analisi di persistenza sulla struttura poliedrale risultante) richiede tipicamente conversioni di formato e reimplementazioni ad hoc, in assenza di uno standard dati condiviso che attraversi l'intero spettro dalla geometria tropicale all'omologia persistente. Lo sviluppo di rappresentazioni dati interoperabili per complessi poliedrali, capaci di fungere da interfaccia comune tra strumenti di geometria tropicale, teoria dei matroidi, varietà toriche e topologia computazionale, costituisce una direzione di lavoro tanto pragmatica quanto necessaria per tradurre la sintesi teorica delineata al capitolo 8 in una pipeline computazionale effettivamente unificata — un obiettivo di particolare rilevanza per le applicazioni cartografiche trasversali discusse in questo paper, che

tipicamente richiedono di comporre in sequenza strumenti provenienti da più di uno di questi ambiti.

Conclusioni e Prospettive

Gli approcci combinatori-algebrici moderni rappresentano una sintesi profonda e fruttuosa tra discipline matematiche tradizionalmente separate. La geometria tropicale, con i suoi semianelli idempotenti e le sue curve su grafi metrici, fornisce un framework algebrico naturale per problemi di ottimizzazione combinatoria, rivelando connessioni inaspettate tra cammini minimi su grafi e geometria algebrica classica.

Le Grassmanniane tropicali e i matroidi offrono una parametrizzazione combinatorica degli spazi di configurazioni lineari, essenziale in applicazioni che spaziano dalla computer vision alla teoria dei grafi di rigidità. Le varietà toriche costruiscono ponti tra geometria algebrica e ottimizzazione poliedrale, permettendo l'applicazione di tecniche algebriche sofisticate a problemi computazionali concreti.

La teoria di Morse discreta e l'omologia persistente forniscono strumenti potenti per l'analisi topologica di dati geometrici, con applicazioni dirette alla cartografia computazionale e all'analisi di mesh. L'estensione direzionale dell'omologia persistente cattura anisotropie essenziali in fenomeni geografici e fisici, superando le limitazioni degli approcci isotropi classici.

Infine, la teoria dei politopi di Newton e delle amoebe rivela connessioni profonde tra geometria combinatorica, algebra computazionale e analisi complessa, con applicazioni alla risoluzione di sistemi polinomiali e all'analisi di stabilità di sistemi dinamici parametrici.

Le prospettive future di questi approcci sono molteplici. L'integrazione crescente con tecniche di apprendimento automatico (machine learning) promette nuovi sviluppi: la topologia dei dati può guidare l'architettura di reti neurali, mentre le strutture combinatoriche possono fornire garanzie teoriche su proprietà di generalizzazione. La geometria tropicale trova applicazioni emergenti in biologia computazionale, dove phylogenetic trees e reti metaboliche ammettono descrizioni naturali in termini di curve tropicali.

L'unificazione di questi approcci sotto un framework teorico coerente rimane una sfida importante. La teoria degli schemi tropicali, che generalizza la

tropicalizzazione oltre il livello degli insiemi di punti includendo strutture moltiplicative, rappresenta un passo in questa direzione. Allo stesso modo, lo sviluppo di una teoria coerente dell'intersezione per varietà tropicali, che estenda il teorema di Bernstein-Kushnirenko al contesto pienamente tropicale, costituisce un obiettivo di ricerca centrale.

Dal punto di vista computazionale, la sfida principale rimane la scalabilità degli algoritmi a dataset di dimensioni realistiche. Sebbene la teoria fornisca riduzioni di complessità significative (come il complesso di Morse ridotto), l'implementazione efficiente richiede strutture dati specializzate e tecniche di parallelizzazione. Il calcolo distribuito dell'omologia persistente e l'ottimizzazione GPU di algoritmi tropicali rappresentano direzioni di ricerca attive.